

תורת התחזיק - תרגיל 7

שאלה 1. יהי M R -מודול ארטין. הוכיחו כי קיימים n -מובילס M -אי-פנידיג.
 $M = \bigoplus_{i=1}^n M_i$ כך ש- $M_1, \dots, M_n \leq M$.

שאלה 2. יהי R חוג ויהי $e \in R$ אידימפוטנט (כלומר $e^2 = e$).

- (א) יהי eR . הוכיחו כי $x \in eR \iff ex = x$.
- (ב) הוכיחו כי eRe עם כאלו החיבור והכפל ב- R הוא חוג וליבר היחידה שלו הוא e .
- (ג) נניח כי $e \neq 1$. האם eRe R -חוג של R ?

שאלה 3. יהי R חוג ויהי $e \in R$ אידימפוטנט.

(א) הוכיחו כי לכל $\varphi \in \text{Hom}_R(eR, eR)$ קיים $a \in eRe := \{fre \mid r \in R\}$

יחיד כך ש- $\varphi x = ax$ לכל $x \in eR$.
 (רמז: התבוננו ב- (φe))

(ב) הוכיחו כי יש איזומורפיזם חזק $\text{End}_R(eR) \cong eRe$.

(ג) האידימפוטנט e נקרא פרימיטיבי אם $e \neq 0$ וחזק eRe אין אידימפוטנטים חזק מ- e ו- e .
 הוכיחו כי e פרימיטיבי $\iff eR$ הוא R -מודול אי-פנידיג.

שאלה 4. יהי F שדה, יהי $R = \begin{bmatrix} F & F & \dots & F \\ 0 & F & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & F \end{bmatrix} \subseteq M_n(F)$ ויהי $M = M_{\text{rxn}}(F)$

אז M הוא R -מודול ימני.

(א) (בציר $e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} \in R$) הראו כי יש איזו'ל R -אידימפוטנטים $M \cong eR$.

(ב) הראו בעזרת שאלה 3 או בכל צדק אחר כי $\text{End}_R(M) \cong F$ וכי M אי-פנידיג.

שאלה 5. יהי F שדה, $A \neq$ אלגברה ויהי M, N A -מודולים ימיניים.

נניח כי $\dim_F A$ ו- $\dim_F M$ סופיים.

יהי $\{a_i\}_{i \in I} \subset F$ קבוצה A ויהי $\{x_j\}_{j \in J} \subset M$.

נהי $f: M \rightarrow N$ העתקה אינארמית מ- A ל- N .

הוכיחו כי $f \in \text{Hom}_A(M, N) \iff f(x_j a_i) = f(x_j) a_i$ לכל $i \in I, j \in J$.

(הערה: הכנחה ש- $\dim_F A, \dim_F M$ סופיים אינך מחויב ומתוך יד כדי לרשם את הפתרון.)

שאלה 6. יהי $V = \mathbb{C}[t]$ חוג הפולינומים במשתנה t מעל $\mathbb{C}$.

(נניח העתקה אינארמית $D, T: V \rightarrow V$ על ידי

$$T(f) = t \cdot f(t) \quad (\text{כפול } t)$$

$$D(f) = \frac{d}{dt}(f) \quad (\text{נגזרת לפי } t).$$

נהי A ה- $\mathbb{C}$ -מ-אלגברה של $\text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ הנוצרת על ידי T ו- D .

אז V הוא A -מודול שמאל (אלו צריך להוכיח זאת).

Ⓐ הוכיחו כי V הוא A -מודול ימני.

Ⓑ הוכיחו כי V הוא A -מודול אנטי-סמילי (כלומר $f \in V, f \neq 0$ שיהיה $f \cdot D = 0$).

Ⓒ הוכיחו כי V הוא A -מודול אנטי-סמילי (כלומר $f \in V, f \neq 0$ שיהיה $f \cdot D = 0$).

קיים $a \in A$ כך ש- $a(t^i) = \frac{t^{i+1}}{i+1}$ לכל $i \in \mathbb{N}$.
(ציינו: D הוא הפינגר $\rightarrow A$!)

הערה: החוג A הוא צוקל (כלומר פשוט) על ידי טרנזי.

אם A (מחזיקה) וכלל מחזיקים.

לא נכונה זאת.

אם A (מחזיקה) וכלל מחזיקים.

אם A (מחזיקה) וכלל מחזיקים.

אם A (מחזיקה) וכלל מחזיקים.